MITTLERER SCHULABSCHLUSS
AN DER MITTELSCHULE 2021

MATHEMATIK

8. Juli 2021
8:30 Uhr – 11:00 Uhr

Platzziffer (ggf. Name/Klasse): ____

Die Benutzung von für den Gebrauch an der Mittelschule zugelassenen **Formelsammlungen** bzw. **Taschenrechnern** ist während der gesamten Prüfung **erlaubt** (vgl. KMS vom 06.11.2019 Nr. III.2 – BS7200.0/41/1).

Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn sowohl der **Lösungsweg** als auch die **Teilergebnisse** aus dem Lösungsblatt ersichtlich sind und sich die Gesamtergebnisse daraus ableiten lassen. Auf mathematische Genauigkeit und korrekte Schreibweisen ist zu achten.

Jeder Prüfling muss **d i e e i n e** vom Prüfungsausschuss ausgewählte **A u f g a b e n g r u p p e** bearbeiten.

Gesamtbewertung		Erst-korrektur	Zweit-korrektur
Aufgabengruppe I oder II	45 Punkte		

Note ☐

Notenstufen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	45,0 – 38,0	37,5 – 31,0	30,5 – 23,0	22,5 – 15,0	14,5 – 7,0	6,5 – 0

Erstkorrektur: ____________________________________
(Datum, Unterschrift)

Zweitkorrektur: ____________________________________
(Datum, Unterschrift)

Bemerkung: ____________________________________

Aufgabengruppe I

Punkte

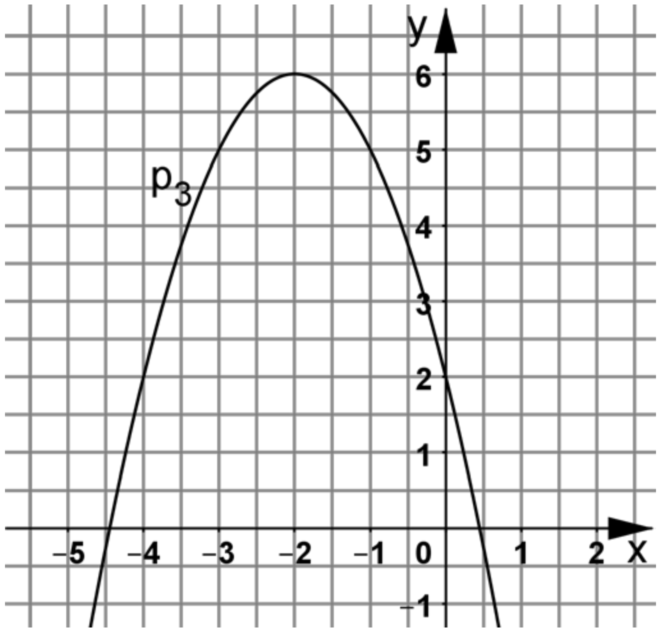
1. a) Formen Sie die Funktionsgleichung der Normalparabel p_1: $y = x^2 + 2x - 3$ in die Scheitelpunktform um und geben Sie den Scheitelpunkt S_1 an.

b) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die Punkte $A(-2 \mid -3)$ und $B(2 \mid 5)$ auf der Normalparabel p_1 liegen.

c) Die Normalparabel p_1 schneidet die x-Achse in den Punkten P und Q. Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten dieser beiden Punkte und geben Sie P und Q an.

d) Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 verläuft durch die Punkte $C(1 \mid -6)$ und $D(-4 \mid -1)$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_2 in der Normalform.

e) Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Normalparabel p_3.
Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_3 in der Normalform.



Quelle: StMUK

f) Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte T und U der Normalparabel p_4: $y = x^2 - 2x + 1$ mit der Geraden g: $y = 2x - 2$ und geben Sie T und U an.

g) Zeichnen Sie die Graphen der Normalparabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. 9

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

2. In einer bayerischen Stadt waren am 01.01.2010 insgesamt 67 279 Menschen gemeldet.

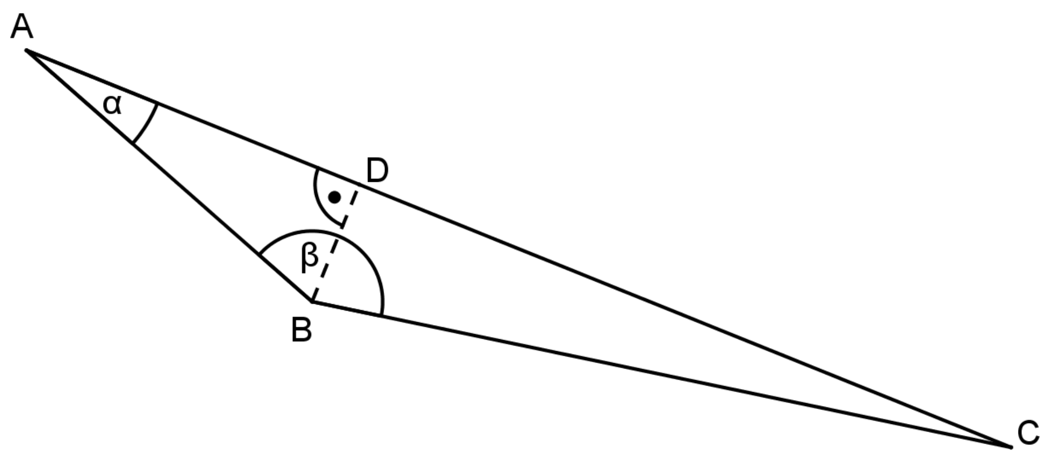
   a) Neun Jahre später waren es bereits 81 240 Menschen. Berechnen Sie für diesen Zeitraum das durchschnittliche jährliche Bevölkerungswachstum in Prozent.

   b) Die Anzahl der unter 6-jährigen Kinder ging im Zeitraum von zwei Jahren um jährlich 1,3 % auf 3 245 Personen zurück.
   Berechnen Sie die Anzahl der Personen dieser Altersgruppe zu Beginn dieser beiden Jahre.

   c) Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich die Zahl der Bewohner dieser Stadt verdoppeln würde, wenn man von einem durchschnittlichen jährlichen Zuwachs von 3,75 % ausgeht. Runden Sie das Ergebnis auf volle Jahre. 4

3. In der folgenden Skizze gilt:
   $\overline{AB} = 46\text{ cm}$; $\alpha = 28°$; $\beta = 140°$.

   Berechnen Sie die Länge der Strecke $[AC]$ in cm.



Quelle: StMUK

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu 4

4. Vereinfachen Sie den unten stehenden Term so weit wie möglich.
   Es gilt: $x, y, z \neq 0$.

$$\frac{2 \cdot x^3 \cdot 6 \cdot y^{-4} \cdot 10 \cdot z^{-6} \cdot x^{-2} \cdot 2 \cdot y^8 \cdot z^2}{3 \cdot y^2 \cdot 10 \cdot x^{-3} \cdot 4 \cdot z^{-4}}$$

2

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

5. a) Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden g_1, die durch die Punkte $A\,(4\,|\,-1)$ und $B\,(6\,|\,1)$ verläuft.

   b) Die Gerade g_2 verläuft durch den Punkt $C\,(2\,|\,4)$ und steht senkrecht auf der Geraden g_3: $\frac{y}{x} = 1$.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden g_2.

   c) Zeichnen Sie die Geraden g_1 und g_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

   d) Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung einer Geraden g_4 an, die parallel zur x-Achse verläuft.

   e) Der Punkt $D\,(-3\,|\,3)$ liegt auf der Geraden g_5: $y = m_5 x - 9$.
   Bestimmen Sie die Steigung m_5 rechnerisch.

   f) Die Geraden g_6: $y = 2x - 7$ und g_7: $y = -\frac{1}{2}x + 3$ schneiden sich im Punkt S.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunkts S und geben Sie S an.

   g) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N der Geraden g_7 mit der x-Achse und geben Sie N an. 8

6. Lösen Sie die folgende Gleichung rechnerisch.
   Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{3+x} = \frac{7}{x-2}$$ 4

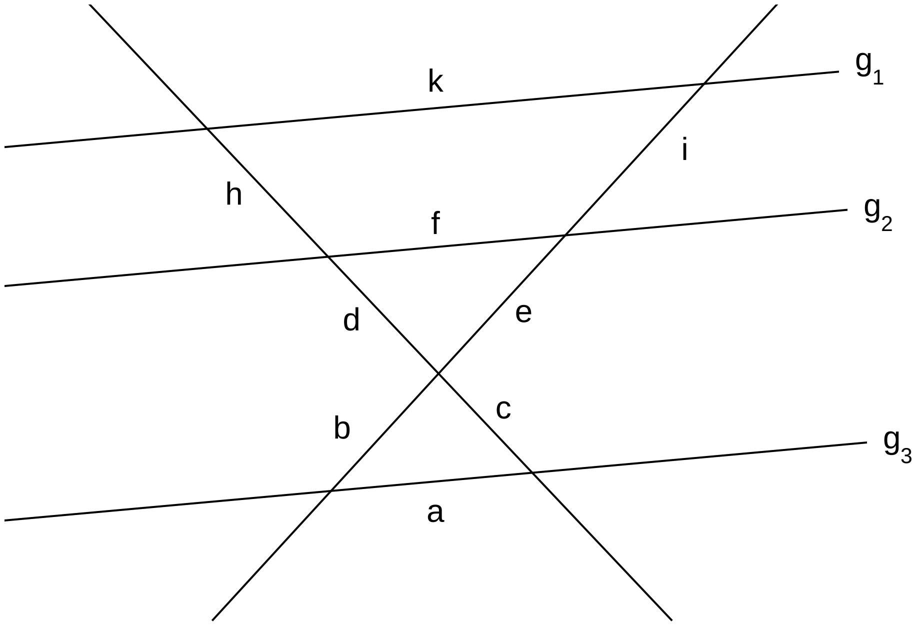
7. Für die Herstellung eines goldenen, halbkugelförmigen Schmuckanhängers mit einem Durchmesser von 11 mm verwendet ein Goldschmied das Gold von acht kleineren Kugeln mit einem Durchmesser von jeweils 4,5 mm.
   Anschließend stellt er aus dem überschüssigen Material eine Goldkugel für ein weiteres Schmuckstück her.

   Berechnen Sie den Radius dieser neuen Goldkugel. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

8. Es gilt: $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$.



Quelle: StMUK

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

Durch korrektes Ersetzen der Platzhalter □ sollen richtige Anwendungen der Strahlensätze entstehen.
Schreiben Sie die richtigen Gleichungen vollständig auf Ihr Lösungsblatt.

(1) $\frac{i+e}{k} = \frac{e}{\square}$

(2) $\frac{\square}{e} = \frac{c}{\square}$

(3) $\frac{a}{k} = \frac{c}{\square}$ 3

9. Folgende Aufgaben sind Anwendungen von binomischen Formeln.

Ersetzen Sie die Platzhalter □ jeweils durch den entsprechenden Term und schreiben Sie die mathematisch richtige Gleichung auf Ihr Lösungsblatt.

(1) $\left(\sqrt{2}a + \square\right) \cdot \left(\sqrt{2}a - \square\right) = \square - 64b^2$

(2) $\frac{1}{16}a^2b^4 - \square + \square = (\square - 2a)^2$ 3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

10. In einem Behälter befinden sich sechs Kugeln, von denen eine Kugel schwarz, drei grün und zwei rot sind.
Zwei Mal nacheinander wird eine Kugel zufällig gezogen und nicht zurückgelegt.

    a) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm mit den möglichen Ergebnissen und beschriften Sie die Äste mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

    b) Die zweite gezogene Kugel soll schwarz sein.
    Bestimmen Sie für dieses Ereignis die Wahrscheinlichkeit in Prozent.

    c) Die höchstmögliche Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Farbkombination, ohne Beachtung der Reihenfolge, beträgt beim im Vortext beschriebenen Zufallsexperiment 40 Prozent.
    Geben Sie an, für welche Farbkombination dies zutrifft, und begründen Sie Ihre Entscheidung mit Hilfe einer Rechnung. 4

Summe: 45

Aufgabengruppe II

Punkte

1. a) Die Gerade g_1 hat die Funktionsgleichung $y = -0{,}5x + 3$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes N von g_1 mit der x-Achse und geben Sie N an.

b) Übertragen Sie die Wertetabelle zur Geraden g_1 auf Ihr Lösungsblatt und ergänzen Sie die fehlenden Werte.

x	5	
y		21

c) Die Gerade g_2 verläuft durch den Punkt B (–2,5 | 0) und steht senkrecht auf der Geraden g_1.

Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden g_2.

d) Zeichnen Sie die Geraden g_1 und g_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

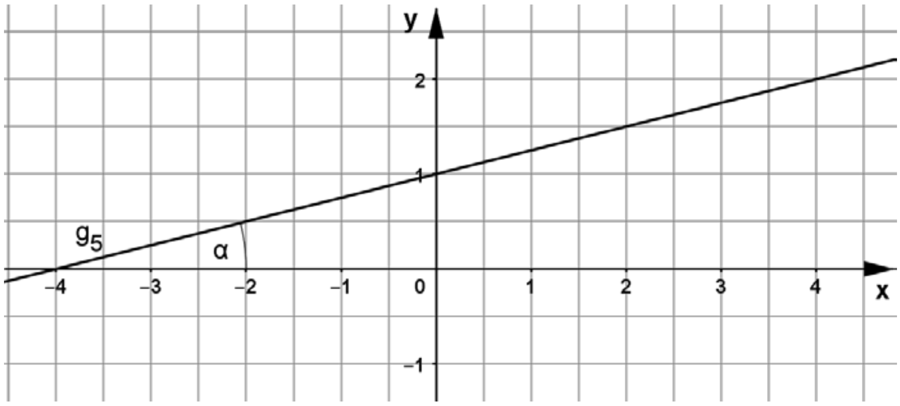
e) Die Gerade g_3 verläuft durch die Punkte C (–1 | –1) und D (4 | 1).

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g_3 rechnerisch.

f) Die Gerade g_4: $-0{,}5x = -5 - y$ schneidet die Gerade g_1 im Punkt T.

Bestimmen Sie durch Rechnung die Koordinaten dieses Schnittpunkts T und geben Sie T an.

g) Gegeben ist der Graph der Funktion g_5 (siehe Zeichnung).
Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden g_5 an.



Quelle: StMUK

h) Berechnen Sie den Winkel α (siehe Zeichnung). 9

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

2. Lösen Sie die folgende Gleichung rechnerisch.
Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

$$\frac{60}{x} - \frac{32}{x+1} = \frac{26}{x-2}$$ 4

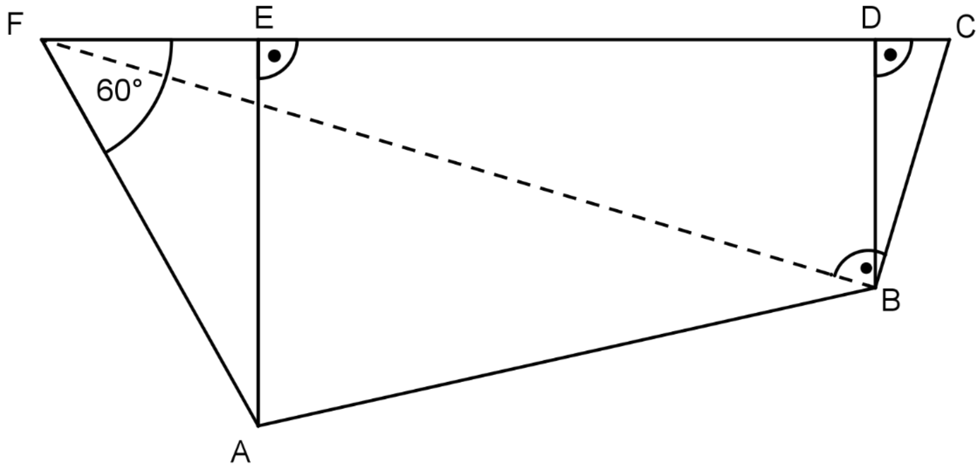
3. Am 1. Januar 1998 hatte ein Sportverein in einer Großstadt 85 000 Mitglieder.

a) Die Mitgliederzahl sank bis zum 1. Januar 2017 auf 63 750 Mitglieder.
Bestimmen Sie die durchschnittliche prozentuale Abnahme pro Jahr.

b) Am 1. Januar 2019 hatte der Verein 67 800 Mitglieder. Die Vereinsführung erhoffte sich ab diesem Zeitpunkt ein jährliches Wachstum von 2,9 %.
Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren der Verein in diesem Fall wieder den Mitgliederstand vom 1. Januar 1998 erreichen würde. Runden Sie das Ergebnis auf volle Jahre.

c) Berechnen Sie die Mitgliederzahl am 1. Januar 2030 im Falle einer gleichbleibenden jährlichen Steigerung um 3,3 % ab dem 1. Januar 2019. 4

4. In nachstehender Skizze gilt:
$\overline{AF} = 16\text{ dm}$; $\overline{ED} = 22\text{ dm}$; $\overline{DC} = 2\text{ dm}$



Quelle: StMUK
Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes ABDE.

b) In der oben abgebildeten Skizze lässt sich der Kathetensatz anwenden.
Stellen Sie eine korrekte Anwendung dieses Satzes mit den entsprechenden Streckenbezeichnungen auf. 5

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

5. a) Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte A $(-2|-3)$ und B $(2|5)$.
Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform.

b) Eine weitere Normalparabel p_2 hat die Funktionsgleichung

$y = x^2 - 5x + 2{,}25$.

Bestimmen Sie rechnerisch die Scheitelpunktform und geben Sie den Scheitelpunkt S_2 an.

c) Die Normalparabel p_2 schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 und N_2.

Berechnen Sie die x-Koordinaten dieser Nullstellen.

d) Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_3 hat den Scheitelpunkt S_3 $(3|4)$.
Ermitteln Sie rechnerisch die Normalform der Funktionsgleichung von p_3.

e) Zeichnen Sie die Normalparabeln p_1 und p_3 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

f) Überprüfen Sie nachvollziehbar, ob folgende Aussage richtig oder falsch ist:
Der Punkt D $(0|1)$ ist ein gemeinsamer Punkt der Normalparabel p_4: $y = (x - 2)^2 - 3$ und der Geraden g: $y = x - 3$.

g) Die Normalparabel p_4 wird an der x-Achse gespiegelt.
Geben Sie die Scheitelpunktform der so entstandenen Normalparabel p_5 an. 8

6. a) Ersetzen Sie die Platzhalter □ in der folgenden Gleichung so, dass eine korrekte Anwendung einer binomischen Formel entsteht.
Schreiben Sie die korrekte Gleichung vollständig auf Ihr Lösungsblatt.

$25x^6y^2 + \square + 36z^8 = (\square + \square)^2$

b) Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.
Es gilt: $y \neq 0$.

(I) $$\frac{0{,}5 \cdot \left(y^4\right)^{-2} \cdot 4y^3 \cdot 6y^6}{12y}$$

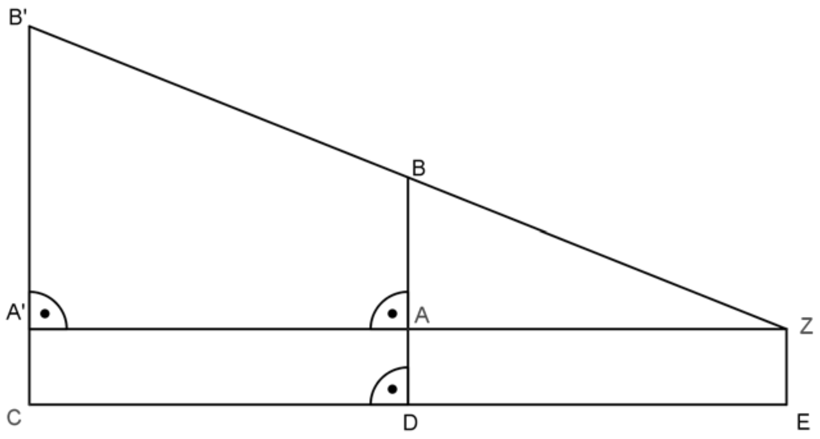
(II) $$\frac{\left(y^{12}\right)^{0{,}5}}{\sqrt[4]{y^{16}}}$$ 3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

7. In folgender Skizze gilt:

$\overline{BD} = 4\,m$; $\overline{B'C} = 6\,m$; $\overline{EZ} = 1{,}2\,m$; $\overline{BZ} = 56\,m$.



Quelle: StMUK

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

a) Durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum Z wird die Strecke [AB] auf die Strecke [A'B'] abgebildet (siehe Skizze).
Ermitteln Sie den Streckungsfaktor k.

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke [BB']. 3

8. In einem Baumarkt gibt es unterschiedlich große Deko-Kugeln aus verschiedenen Materialien.

a) Bei einer Kugel mit dem Radius r = 30 cm ist die untere Halbkugel geschliffen und poliert.
Berechnen Sie die Oberfläche der unteren Halbkugel.

b) 1 cm^3 Granit wiegt 2,8 g.
Ermitteln Sie rechnerisch das Gewicht einer Granitkugel mit dem Durchmesser d = 44 cm in Kilogramm.

c) Eine andere Deko-Kugel wird in einem mit Wasser gefüllten Zylinder aus Glas vollständig untergetaucht. Dieser Zylinder hat einen Durchmesser von d = 15 cm. Der Wasserstand ist nach dem Eintauchen um 5 cm höher.
Berechnen Sie den Durchmesser dieser Deko-Kugel in cm. 5

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

9. Eine Lehrkraft bereitet für die Abschlussfeier 40 äußerlich identische Glückskekse vor. 24 davon enthalten je einen Wunsch für die Zukunft (W), zwölf enthalten ein jeweils unterschiedliches Sprichwort (S) und in den restlichen Keksen steckt jeweils ein Glückssymbol (G).

   a) Alle Glückskekse befinden sich in einem Karton und sollen in zufälliger Reihenfolge einzeln herausgenommen werden.
   Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der erste herausgenommene Keks ein Glückssymbol enthält.

   b) Die Schülersprecherin darf als erste nacheinander zwei Kekse zufällig herausnehmen. Es wird nur zwischen den zwei Ereignissen „W" und „kein W" unterschieden.
   Erstellen Sie dazu ein Baumdiagramm. Beschriften Sie die Äste mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten und berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Schülersprecherin mindestens ein „W" zieht.

   c) Nachdem alle 40 Kekse entnommen worden sind, werden die zwölf Sprichwörter nun laut vorgelesen.
   Berechnen Sie die Anzahl aller möglichen Reihenfolgen, in denen die Sprichwörter vorgelesen werden können. 4

Summe: 45