MITTLERER SCHULABSCHLUSS
AN DER MITTELSCHULE 2020

MATHEMATIK

18. Juni 2020
8:30 Uhr – 11:00 Uhr

Platzziffer (ggf. Name/Klasse): ______________________________

Die Benutzung von für den Gebrauch an der Mittelschule zugelassenen **Formelsammlungen** bzw. **Taschenrechnern** ist während der gesamten Prüfung **erlaubt** (vgl. KMS vom 06.11.2019 Nr. III.2 – BS7200.0/41/1).

Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn sowohl der **Lösungsweg** als auch die **Teilergebnisse** aus dem Lösungsblatt ersichtlich sind und sich die Gesamtergebnisse daraus ableiten lassen. Auf mathematische Genauigkeit und korrekte Schreibweisen ist zu achten.

Jeder Prüfling muss **die eine** vom Prüfungsausschuss ausgewählte **Aufgabengruppe** bearbeiten.

Gesamtbewertung		Erst-korrektur	Zweit-korrektur
Aufgabengruppe I oder II	45 Punkte		

Note | |

Notenstufen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	45,0 – 38,0	37,5 – 31,0	30,5 – 23,0	22,5 – 15,0	14,5 – 7,0	6,5 – 0

Erstkorrektur: ______________________________
(Datum, Unterschrift)

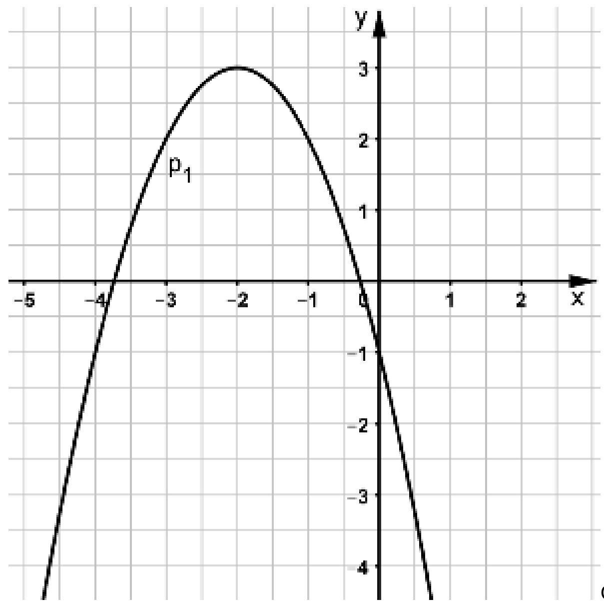
Zweitkorrektur: ______________________________
(Datum, Unterschrift)

Bemerkung: ______________________________

Aufgabengruppe I

Punkte

1. a) Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen einer Normalparabel p_1. Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform.



Quelle: StMUK

b) Überprüfen Sie durch Rechnung, ob die Punkte $A\,(-1\,|\,2)$ und $B\,(-3\,|\,-1{,}5)$ auf der Normalparabel p_2 mit der Funktionsgleichung p_2: $y = x^2 + 4x + 1{,}5$ liegen.

c) Ermitteln Sie rechnerisch den Scheitelpunkt S_2 der Parabel p_2.

d) Die Gerade g mit der Funktionsgleichung $y = 2x + 0{,}5$ hat mit der Parabel p_2 den Punkt R gemeinsam.
Berechnen Sie die Koordinaten von R und geben Sie diesen Punkt an.

e) Zeichnen Sie die Graphen der Parabel p_2 und der Geraden g in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

f) Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_3 hat den Scheitelpunkt $S_3(-0{,}5\,|\,4)$. Durch Spiegelung an der y-Achse entsteht p_4. Durch eine weitere Spiegelung von p_4 an der x-Achse entsteht p_5.
Geben Sie die Funktionsgleichung der Parabel p_5 in der Scheitelpunktform an und stellen Sie Ihren Lösungsweg nachvollziehbar dar. 7

Fortsetzung nächste Seite

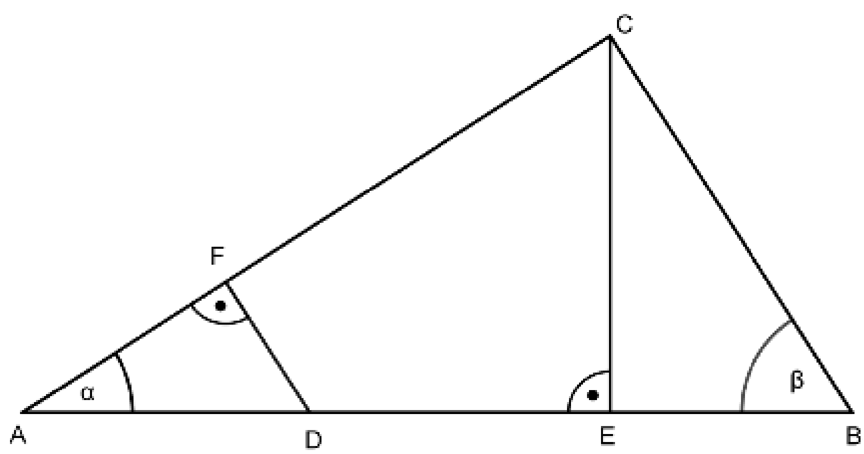
Punkte

2. Das radioaktive Element Kobalt-60 hat eine Halbwertszeit von fünf Jahren.
   a) In einem Behälter befinden sich 3,675 kg Kobalt-60. Berechnen Sie, wie viele Kilogramm nach 13 Jahren von dieser Menge noch vorhanden sind.
   b) Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Jahren von den 3,675 kg Kobalt-60 nur noch 0,1 kg vorhanden sind.
   c) Berechnen Sie die Ausgangsmenge des radioaktiven Elements Kobalt-60, von der nach 38 Jahren noch 0,742 kg vorhanden sind.

5

3. In der folgenden Skizze gilt:
   $\overline{AF} = 4\,\text{cm};\ \overline{AD} = 5\,\text{cm};\ \overline{DF} : \overline{BC} = 1:3;\ \overline{DF} \parallel \overline{BC}$

   Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{CE}$ in cm.



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

Quelle: StMUK

4

4. Vereinfachen Sie den unten stehenden Term so weit wie möglich.
   Es gilt: $x, y > 0$

$$\frac{2 \cdot x^5 \cdot 0{,}5 \cdot y^{-3} \cdot 4x^3 \cdot 2 \cdot y}{8 \cdot y^{-2} \cdot\ x^7} \quad + \quad \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}}$$

2

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

5. a) Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden g_1, die durch die Punkte $C\,(6\,|\,2)$ und $D\,(-3\,|\,-1)$ verläuft.

   b) Die Gerade g_3 verläuft durch den Punkt $B\,(11\,|\,-23)$ und steht senkrecht auf der Geraden g_2: $y = x$.
   Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Geraden g_3.

   c) Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung einer Geraden g_4 an, die parallel zur Geraden g_2: $y = x$ verläuft und nicht auf g_2 liegt.

   d) Der Punkt $A\,(4\,|\,-1)$ liegt auf der Geraden g_5: $y = m_5x - 4$.
   Bestimmen Sie die Steigung m_5 rechnerisch.

   e) Die Gerade g_6: $y = x - 2{,}5$ und die Gerade g_7 mit der Funktionsgleichung g_7: $2x = 3{,}5 - y$ schneiden sich im Punkt S.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunkts S und geben Sie diesen Punkt an.

   f) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N der Geraden g_7 mit der x-Achse und geben Sie diesen Punkt an.

   g) Zeichnen Sie die Geraden g_5 und g_6 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm. 8

6. Lösen Sie die folgende Gleichung rechnerisch.
   Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

$$\frac{-x}{x+3} + 2 = 1 - \frac{3x}{4 \cdot (x-2)}$$

4

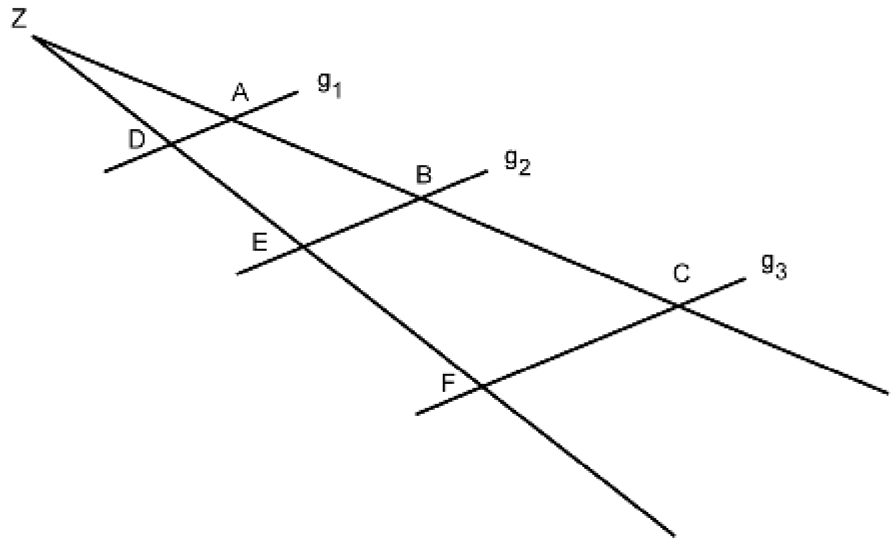
7. Eine Metallkugel mit einem Durchmesser von 40 mm soll eingeschmolzen und zu sechs gleich großen Kugeln umgeformt werden.

   Zeigen Sie durch Rechnung, dass die sechs kleineren Kugeln zusammen einen größeren Oberflächeninhalt haben als die ursprüngliche Kugel. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

8. Es gilt $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$.



Quelle: StMUK

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

a) Von den folgenden vier Aussagen geben zwei die Streckenverhältnisse richtig wieder.
Schreiben Sie die Nummern der richtigen Aussagen auf Ihr Lösungsblatt.

(1) $\overline{ZA} : \overline{ZC} = \overline{ZD} : \overline{ZF}$

(2) $\overline{BZ} : \overline{AZ} = \overline{FZ} : \overline{EZ}$

(3) $\overline{FC} : \overline{ZC} = \overline{EB} : \overline{AB}$

(4) $\overline{ZD} : \overline{DA} = \overline{ZE} : \overline{EB}$

b) Berechnen Sie die Länge der Strecke $\overline{FC}$, wenn folgende Streckenlängen gegeben sind:
$\overline{ZC} = 21\,\text{cm}$; $\overline{BC} = 7\,\text{cm}$; $\overline{EB} = 8\,\text{cm}$ 3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

9. Folgende Aufgaben sind Anwendungen von binomischen Formeln und quadratischen Gleichungen.

   a) Ersetzen Sie die Symbole $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$ und $\mathbf{l}$ jeweils durch den entsprechenden Term und schreiben Sie die mathematisch richtige Gleichung auf Ihr Lösungsblatt.

   (1) $(2a - \mathbf{n})^2 = \mathbf{u} - \mathbf{l} + 4b^{16}$

   (2) $\left(\frac{1}{5}c^3 + \mathbf{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}c^3 - \mathbf{n}\right) = \mathbf{l} - \frac{4}{81}d^4$

   b) Ersetzen Sie die Platzhalter der folgenden Gleichung so, dass eine quadratische Gleichung mit der Lösungsmenge L = {-4; 3} entsteht und schreiben Sie diese auf Ihr Lösungsblatt.

   $(x + \mathbf{n}) \cdot (x - \mathbf{u}) = 0$

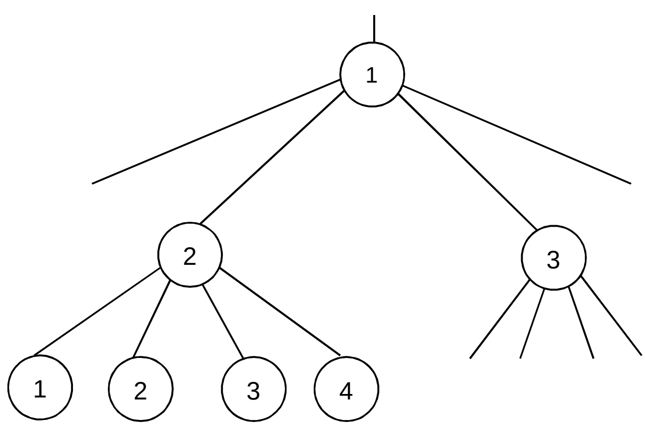
4

10. In einem Behälter befinden sich genau vier Kugeln.
    Sie sind mit den Ziffern 1, 2, 3 und 4 durchnummeriert.

    a) Mit den vier Kugeln kann man unterschiedliche Zahlen legen. Ermitteln Sie rechnerisch die Anzahl aller Kombinationsmöglichkeiten für eine vierstellige Zahl.

    b) Es werden nacheinander zwei Kugeln gezogen und nicht mehr zurückgelegt. Aus beiden gezogenen Ziffern wird ein Bruch gebildet. Die zuerst gezogene Ziffer bildet den Zähler, die zweite den Nenner des Bruches.
    Geben Sie die Ergebnismenge mit allen bei diesem Vorgang möglichen Brüchen an und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der gebildete Bruch den Wert 0,5 hat.

    c) Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einem Baumdiagramm zu einem weiteren Zufallsexperiment. Begründen Sie, dass das Experiment mit Zurücklegen der Kugeln durchgeführt wurde.



Quelle: StMUK

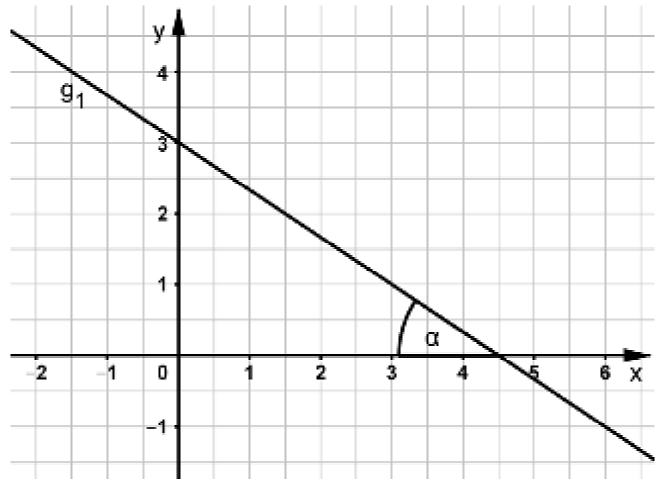
4

Summe: **45**

Aufgabengruppe II

Punkte

1. Gegeben ist der Graph der Funktion g_1.



Quelle: StMUK

a) Geben Sie die Funktionsgleichung der Geraden g_1 an.

b) Die Gerade g_2 verläuft durch die Punkte $A\left(6\,|\,3\right)$ und $B\left(-2\,|\,5\right)$.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g_2 rechnerisch.

c) Die Gerade g_3: $y = -2x + 6$ schneidet die Gerade g_4: $y = 0{,}5x - 1{,}5$ im Punkt T.

Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts T rechnerisch und geben Sie den Punkt an.

d) Überprüfen Sie rechnerisch, ob der Punkt $P\left(7{,}25\,|\,11{,}75\right)$ auf der Geraden g_3 liegt.

e) Zeichnen Sie die Geraden g_3 und g_4 in ein Koordinatensystem.

f) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Schnittpunkts N der Geraden g_5: $0 = -y - 4x + 0{,}5$ mit der x-Achse und geben Sie N an.

g) Erstellen Sie eine Wertetabelle mit 2 Wertepaaren zur Geraden g_5.
Es soll gelten: $x, y \neq 0$

x	x_1	x_2
y	y_1	y_2

h) Berechnen Sie den Winkel α (siehe Zeichnung). 8

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

2. Lösen Sie die folgende Gleichung rechnerisch.
   Geben Sie die Definitionsmenge und die Lösungsmenge an.

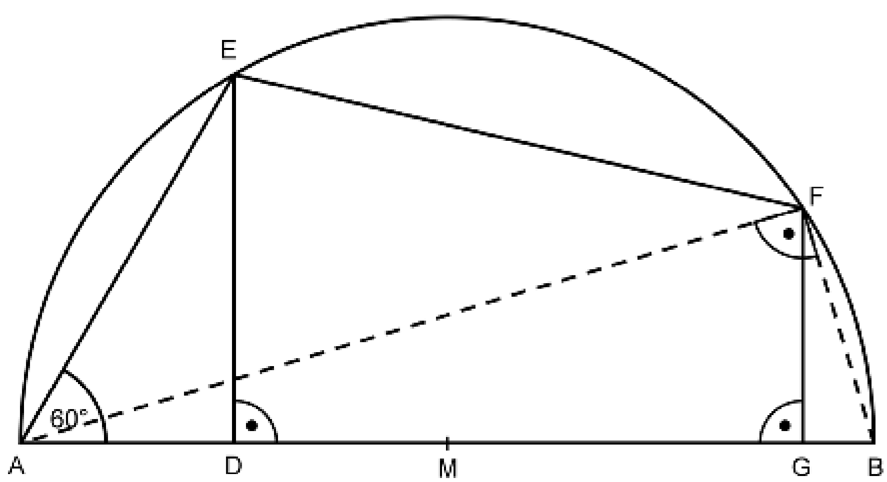
$$\frac{8x+7}{(x+1)\cdot(x+2)}=\frac{9}{x+2}-\frac{2x}{x+1}$$ 4

3. a) Familie Wegmann kauft ein neues Wohnmobil für 50 000 €.
   Berechnen Sie den Wert dieses Wohnmobils nach sechs Jahren, wenn dieser in den ersten zwei Jahren um jeweils 9 % und in den darauf folgenden vier Jahren um jeweils 8 % abnimmt.

   b) Familie Grün kauft sich ein zwölf Jahre altes Wohnmobil zu einem Preis von 19 500 €.
   Bestimmen sie den durchschnittlichen prozentualen Wertverlust pro Jahr, wenn der Neupreis des Wohnmobils 45 000 € betrug.

   c) Ab einem Alter von zwölf Jahren beträgt der durchschnittliche jährliche Wertverlust von Wohnmobilen 6,6 %.
   Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Jahren Familie Grün ihr Wohnmobil verkaufen müsste, um noch mindestens die Hälfte des Kaufpreises von 19 500 € zu erhalten. 4

4. In nachstehender Skizze gilt:
   Es gilt: $\overline{AE}=8\,\text{cm}$, $\overline{DG}=11\,\text{cm}$, $\overline{BG}=1\,\text{cm}$



Quelle: StMUK

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

   a) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Trapezes DGFE.

   b) Bestimmen Sie rechnerisch den Umfang des Trapezes DGFE. 5

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

5. a) Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt $S_1(-1|-6)$.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform.

b) Die Normalparabel p_2 hat die Funktionsgleichung p_2: $y = -x^2 - 6x - 5$ und schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 und N_2.
Berechnen Sie die x-Koordinaten dieser Nullstellen.

c) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten des Scheitelpunkts S_2 der Normalparabel p_2 und geben Sie diesen an.

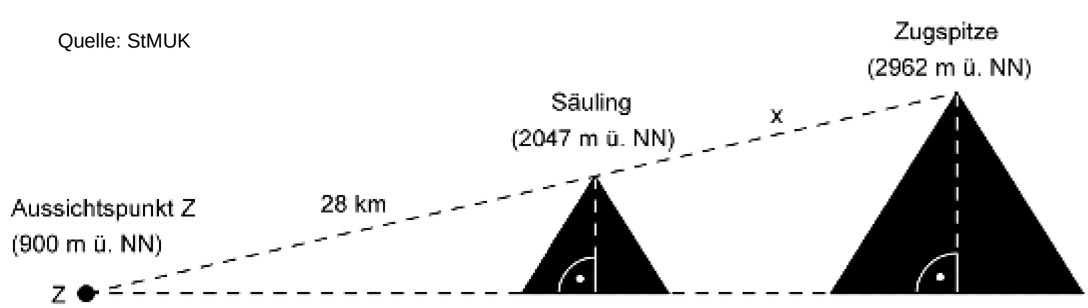
d) Zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.

e) Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_3 verläuft durch die Punkte $D(-1|2)$ und $E(6|-5)$.
Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_3 in der Normalform.

f) Die Parabel p_4 hat die Funktionsgleichung p_4: $3y + 2x^2 = -(-36x + 24 + x^2)$.
Begründen Sie mithilfe einer Rechnung, dass die Parabel nach unten geöffnet ist. 7

6. Von einem Aussichtspunkt im Allgäu auf einer Höhe von 900 Meter über Normalnull (m ü. NN) aus betrachtet liegen die Gipfel der Berge Säuling und Zugspitze auf einer Geraden (siehe Skizze).

Quelle: StMUK



Hinweise: Skizze nicht maßstabsgetreu, Erdkrümmung vernachlässigt, Höhenangaben in „Meter über Normalnull“

a) Berechnen Sie den Abstand x der beiden Gipfel voneinander, wenn die Entfernung vom Aussichtspunkt zum Gipfel des Säulings 28 km beträgt.

b) Die Höhe des „Säuling-Dreiecks“ könnte mit einer zentrischen Streckung auf die Höhe des „Zugspitze-Dreiecks“ abgebildet werden (Streckungszentrum Z ist der Aussichtspunkt).
Ermitteln Sie den entsprechenden Streckungsfaktor k. 3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

7. Bei einer Gleichung zur Anwendung einer binomischen Formel ist nur noch das gemischte (lineare) Glied bekannt.
   Stellen Sie eine mögliche vollständige Gleichung auf und notieren Sie diese auf Ihrem Lösungsblatt.

   $\mathbf{n} - 120x^4y^3 + \mathbf{u} = (\mathbf{l} - \mathbf{«})^2$ 2

8. Sarah erstellt 19 Karten mit je einem Buchstaben, aus denen sich das folgende Sprichwort legen lässt:

   OHNE FLEISS KEIN PREIS

   a) Sie wirft alle Karten in eine Urne und zieht zufällig eine heraus.
      Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass auf der Karte ein *N* steht.

   b) Sarah benutzt erneut eine Urne mit allen 19 Buchstabenkarten und zieht zweimal eine Karte ohne Zurücklegen. Sie unterscheidet nur zwischen den zwei Ereignissen „S“ und „kein S“.
      Erstellen Sie dazu ein Baumdiagramm, beschriften Sie die Äste mit den jeweiligen Wahrscheinlichkeiten und berechnen Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit Sarah mindestens ein *S* zieht.

   c) Bei einem weiteren Zufallsexperiment verteilt Sarah die 19 Buchstabenkarten auf vier Urnen und gibt jedes Wort in eine eigene Urne. Sie wählt zufällig eine dieser Urnen aus und zieht daraus eine Karte.
      Ermitteln Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit, mit der sie ein *S* zieht.

   d) Aus der Urne mit den Buchstaben des Wortes *PREIS* zieht Sarah nacheinander alle Karten und legt sie in der gezogenen Reihenfolge auf den Tisch.
      Berechnen Sie die Anzahl aller möglichen verschiedenen Reihenfolgen der Buchstaben. 5

9. Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich.
   Es gilt: $x \neq 0$

   $$\frac{x^2 \cdot x \cdot \left(x^2\right)^{-3}}{x^{-6} \cdot x^2} + \frac{\sqrt[2]{x^4}}{\left(x^{0,5}\right)^4}$$ 2

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

10. Eine Hohlkugel mit einem Außendurchmesser von 2 m soll als U-Boot verwendet werden. Diese Kugel besteht aus Metall und hat eine Wandstärke von 3,2 cm.

    a) Die Kugel erhält außen einen Schutzanstrich.
    Berechnen Sie den zu streichenden Flächeninhalt.

    b) Die Kugel wird zu Testzwecken mithilfe eines Krans in ein Becken gehoben.
    Ermitteln Sie rechnerisch die Masse in Tonnen, die der Kran mindestens heben muss, wenn 1 m^3 Metall die Masse 7870 kg hat.

    c) Das U-Boot soll in einem zylinderförmigen Tauchbecken mit einem Durchmesser von 3 m vollständig untergetaucht werden. Vor dem Eintauchen der Kugel beträgt der Wasserstand im Becken bereits 3 m.
    Berechnen Sie die Mindesthöhe des Tauchbeckens, damit das Wasser beim vollständigen Untertauchen des U-Boots nicht über den Beckenrand läuft. 5

Summe: 45