MITTLERER SCHULABSCHLUSS
AN DER MITTELSCHULE 2018

MATHEMATIK

20. Juni 2018
8:30 Uhr – 11:00 Uhr

Platzziffer (ggf. Name/Klasse): ____

Die Benutzung von für den Gebrauch an der Mittelschule zugelassenen **Formelsammlungen** bzw. **Taschenrechnern** ist während der gesamten Prüfung **erlaubt** (vgl. KMS vom 12.02.2014 Nr. IV.2 – S 7500 – 4. 4272).

Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn sowohl der **Lösungsweg** als auch die **Teilergebnisse** aus dem Lösungsblatt ersichtlich sind und sich die Gesamtergebnisse daraus ableiten lassen. Auf mathematische Genauigkeit und korrekte Schreibweisen ist zu achten.

Jeder Prüfling muss **die eine** vom Prüfungsausschuss ausgewählte **Aufgabengruppe** bearbeiten.

Gesamtbewertung		Erst-korrektur	Zweit-korrektur
Aufgabengruppe I oder II	45 Punkte		

Note

Notenstufen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	45,0 – 38,0	37,5 – 31,0	30,5 – 23,0	22,5 – 15,0	14,5 – 7,0	6,5 – 0

Erstkorrektur: ________________________________
(Datum, Unterschrift)

Zweitkorrektur: ________________________________
(Datum, Unterschrift)

Bemerkung: ________________________________

Aufgabengruppe I

Punkte

1. a) Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte $D(1|6)$ und $B(4|3)$. Berechnen Sie die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform.

   b) Die nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat die Funktionsgleichung p_2: $y = -x^2 + x + 3{,}75$. Geben Sie die Scheitelpunktform dieser Parabel an.

   c) Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der Schnittpunkte N_1 und N_2 der Parabel p_2 mit der x-Achse und geben Sie diese Punkte an.

   d) Eine weitere nach unten geöffnete Normalparabel p_3 hat den Scheitelpunkt $S_3\ (4|7)$. Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Parabel p_3 in der Normalform.

   e) Die Parabel p_4 hat die Funktionsgleichung p_4: $y = (x-2)^2 + 3$.
   Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts S_4 von p_4 an.

   f) Geben Sie die Koordinaten von zwei beliebigen Punkten G und H an, die auf der Parabel p_4 liegen.

   g) Zeichnen Sie die Graphen der Parabeln p_3 und p_4 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
   Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -2 bis 8, y-Achse von -1 bis 10 8

2. Folgende Gleichungen sind Anwendungen von Binomischen Formeln.
   Ersetzen Sie jeweils den Platzhalter ■ durch die entsprechenden Terme und schreiben Sie die vollständigen Gleichungen auf Ihr Lösungsblatt.

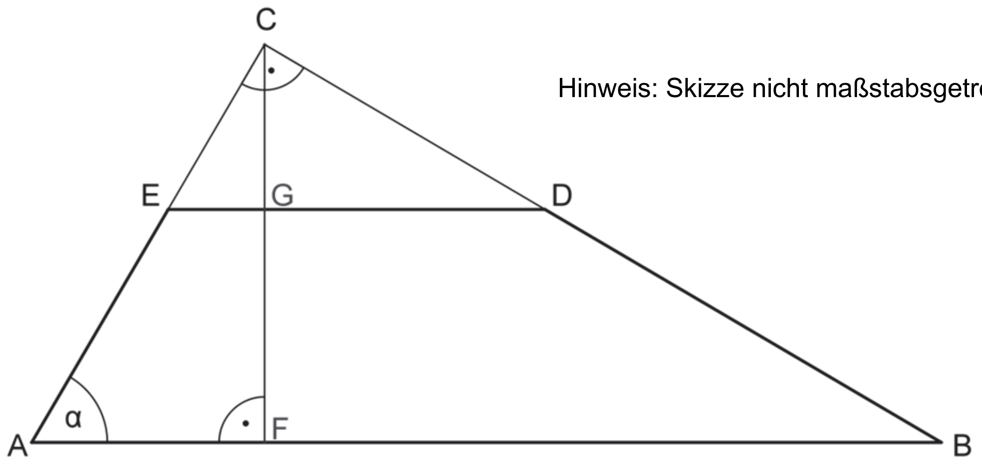
   a) $\blacksquare + \blacksquare + \frac{1}{4}c^8 = \left(3ab^3 + \blacksquare\right)^2$

   b) $6{,}25z^2 - 30yz + \blacksquare = \left(\blacksquare - \blacksquare\right)^2$ 3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

3. In einer Figur (siehe Skizze) ist [AB] parallel zu [ED].
   Es gilt: $\overline{AC} = 2{,}5\,\text{dm}$, $\overline{AF} = 1{,}25\,\text{dm}$ und $\overline{FG} = 1{,}5\,\text{dm}$



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

   a) Bestimmen Sie die Größe des Winkels α rechnerisch.
   b) Berechnen Sie jeweils die Länge der Strecken [ED] und [AB].
   c) Ermitteln Sie rechnerisch den Flächeninhalt des Trapezes ABDE. 5

4. Folgende Wertepaare sind Punkte auf der Geraden g_1:

x	-10	-5	0	2,5
y	-4	-1	2	3,5

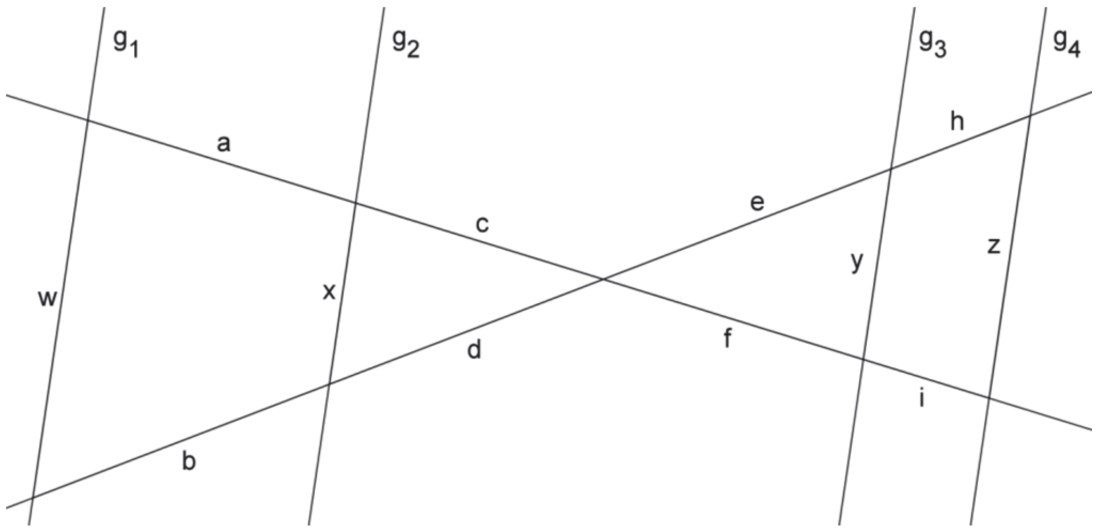
   a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g_1 rechnerisch.
   b) Die Gerade g_2 ist durch die Gleichung $-x + 5y = 20$ bestimmt.
      Die Gerade g_3 steht senkrecht auf der Geraden g_2 und verläuft durch den Punkt $A(-3\,|\,0)$.
      Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g_3 rechnerisch.
   c) Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Gerade g_4: $y = -5x - 5$
      die Gerade g_2 im Punkt $B(5\,|\,5)$ schneidet.
   d) Überprüfen Sie folgende Aussagen und begründen Sie Ihre Entscheidung:
      (I) Die Gerade g_4 verläuft parallel zur Geraden g_5, die durch die Gleichung $-5x + y = -3$ bestimmt ist.
      (II) Die Gerade g_4 steht senkrecht auf der Geraden g_6: $y = 0{,}2x$.
   e) Zeichnen Sie die Graphen der Geraden g_1 und g_6 in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.
      Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -6 bis 6, y-Achse von -3 bis 6 8

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

5. In einem Spiel werden gleiche Würfel mit den Augenzahlen 1 bis 6 verwendet.
   a) Zwei Würfel werden gleichzeitig geworfen.
      Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, die Augensumme 3 zu erreichen.
   b) Ein Würfel wird dreimal nacheinander geworfen. Die Zahlen werden in der gewürfelten Reihenfolge notiert.
      Ermitteln Sie rechnerisch die Anzahl der möglichen Ergebnisse.
   c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich bei dreimaligem Werfen eines Würfels die Kombination 4 / 4 / 4 ergibt. 3

6. Schreiben Sie die folgenden Aussagen auf Ihr Lösungsblatt und ersetzen Sie jeweils den Platzhalter ■ so, dass die Streckenverhältnisse richtig wiedergegeben werden ($g_1 \parallel g_2 \parallel g_3 \parallel g_4$):



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

a) $\frac{a+c}{f} = \frac{■}{e}$ b) $\frac{w}{■} = \frac{b+d}{d}$ c) $\frac{■}{f} = \frac{x}{y}$ 3

7. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch:

$$\frac{8x+39}{4x-12} = x$$

3

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

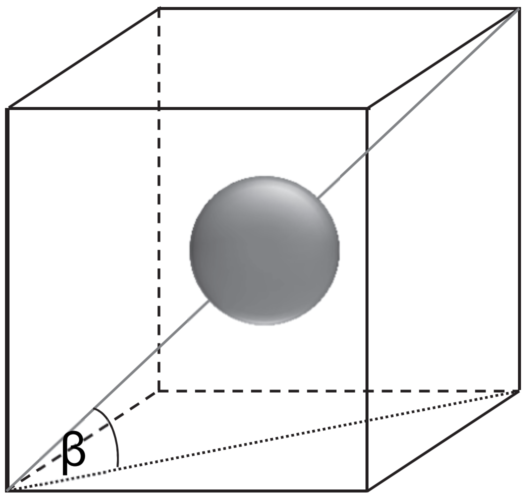
8. Am 31. Dezember 2007 hatte eine bayerische Stadt 133 539 Einwohner.
   Am letzten Tag des Jahres 2016 waren es nur noch 124 698 Einwohner.

   a) Berechnen Sie den durchschnittlichen jährlichen Bevölkerungsrückgang in Bezug auf das jeweilige Vorjahr in Prozent.

   b) Ab dem 1. Januar 2017 möchte die Stadt einen durchschnittlichen jährlichen Bevölkerungszuwachs von 0,6 % in Bezug auf das jeweilige Vorjahr erreichen. Ermitteln Sie rechnerisch, in wie vielen Jahren die Einwohnerzahl auf 150 000 anwachsen würde.

   c) Am 31. Dezember 2007 hatte ein Nachbarort 2205 Einwohner.
   Dort stieg die Einwohnerzahl in den folgenden fünf Jahren um 0,7 % im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr. In den darauf folgenden vier Jahren erhöhte sie sich um jeweils 1,4 % im Vergleich zum jeweiligen Vorjahr.
   Bestimmen Sie rechnerisch die Einwohnerzahl des Nachbarortes am Ende des Jahres 2016. 5

9. In einem Würfel wird eine Kugel von zwei gespannten Schnüren gehalten, die jeweils eine Würfelecke mit der Kugeloberfläche verbinden (siehe Skizze).



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu

Die jeweils 3,0 cm langen Schnüre verlaufen entlang der Raumdiagonalen, auf der sich auch der Mittelpunkt der Kugel befindet.
Die Kugel hat ein Volumen von 33,5 cm^3. Der Winkel β beträgt gerundet 35,27°.

Berechnen Sie das Volumen des Würfels. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

10. Die Geschwister Lena und Patrick gehen mit ihren Eltern ins Theater. Der Eintritt kostet für alle zusammen 64 €. Die gleiche Vorstellung besucht auch Herr Stur mit seinen drei Kindern und zahlt insgesamt 60 €.

    a) Eines der folgenden vier Gleichungssysteme A bis D stellt diesen Sachverhalt richtig dar:

    A (I) $2x + 2y = 64$
    (II) $3x + y = 64$

    B (I) $2x + 2y = 4$
    (II) $3x + y = 4$

    C (I) $x + y = 32$
    (II) $x + 3y = 60$

    D (I) $x + y = 32$
    (II) $x + 3y = 30$

    Geben Sie dieses Gleichungssystem auf Ihrem Lösungsblatt an.

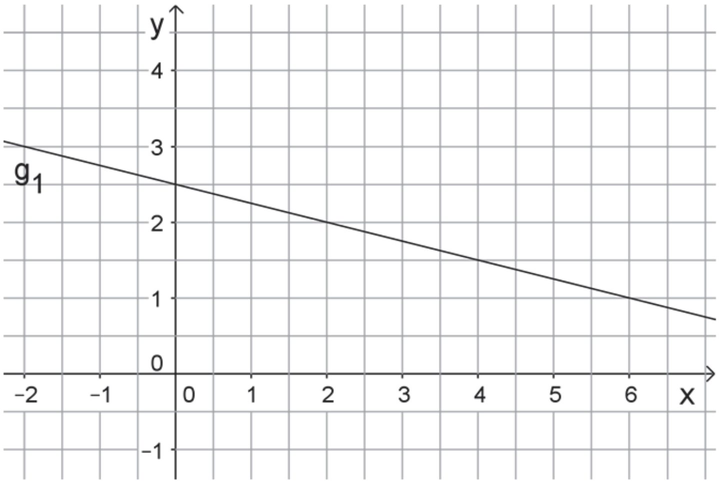
    b) Ermitteln Sie rechnerisch den jeweiligen Eintrittspreis für ein Kind und eine erwachsene Person. 3

Summe: **45**

Aufgabengruppe II

Punkte

1. Gegeben ist der Graph der linearen Funktion g_1.



a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Geraden g_1.

b) Die Gerade g_2 hat die Funktionsgleichung g_2: $y = -2x - 3$.
Die Gerade g_3 verläuft parallel zu g_2 und durch den Punkt $C(1|2)$.
Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g_3 rechnerisch.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N von g_2 mit der x-Achse und geben Sie N an.

d) Die Gerade g_2 wird an der x−Achse gespiegelt. Geben Sie die Funktionsgleichung der dadurch entstandenen Geraden g_4 an.

e) Der Punkt $D(-16{,}5 \,|\, y_D)$ liegt auf der Geraden g_2.
Berechnen Sie die fehlende Koordinate von D.

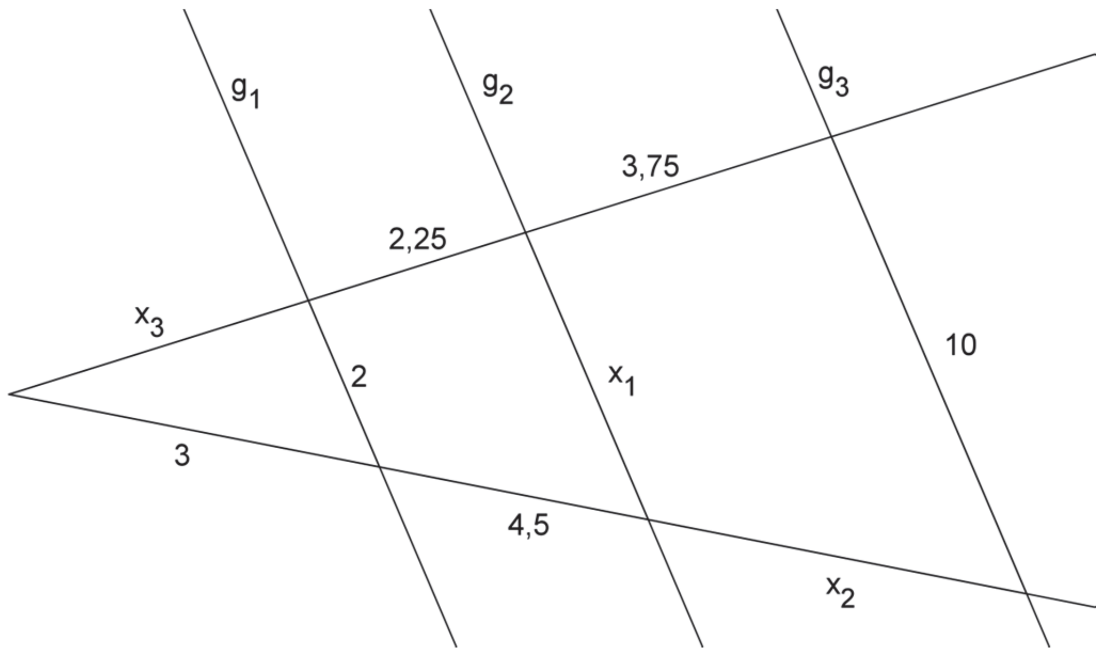
f) Zeichnen Sie die Graphen der Geraden g_2 und g_3 in ein Koordinatensystem mit der Einheit 1 cm.
Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -5 bis 5, y-Achse von -4 bis 7

g) Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten $A(2|0)$ und $B(0|4)$. 8

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

2. Berechnen Sie die Längen der Strecken x_1, x_2 und x_3 (siehe Skizze).
   Es gilt: $g_1 \parallel g_2 \parallel g_3$



Hinweise:
Maße in cm
Skizze nicht maßstabsgetreu

3

3. a) Die nach oben geöffnete Normalparabel p_1 hat den Scheitelpunkt $S_1\,(2\,|\,-4)$.
   Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Parabel p_1 in der Normalform.

   b) Die Punkte $A\,(-4\,|\,-5)$ und $B\,(-1\,|\,-2)$ liegen auf der nach unten geöffneten Normalparabel p_2.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_2.

   c) Die Normalparabel p_3 hat die Funktionsgleichung p_3: $y = x^2 - 6x + 5$.
   Berechnen Sie die Koordinaten des Scheitelpunkts S_3 von p_3.

   d) Ermitteln Sie rechnerisch die x−Koordinaten der Schnittpunkte N_1 und N_2 von p_3 mit der x−Achse.

   e) Gegeben ist die Normalparabel p_4: $y = -x^2 - 4x - 9$. Begründen Sie mithilfe einer Rechnung, dass sich die Parabeln p_3 und p_4 nicht schneiden.

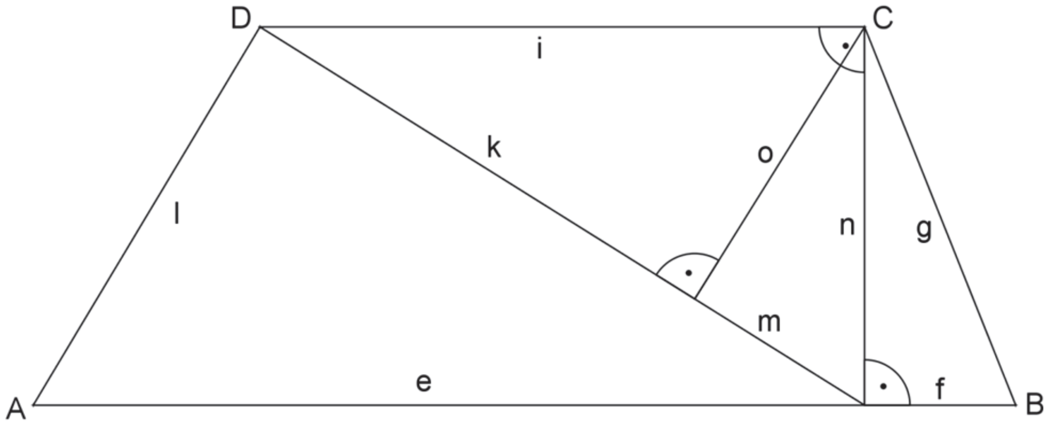
   f) Durch Spiegelung der Parabel p_1 an der y−Achse entsteht die Parabel p_5.
   Zeichnen Sie die Graphen der Parabeln p_1 und p_5 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
   Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -6 bis 6, y-Achse von -5 bis 6

8

Fortsetzung nächste Seite

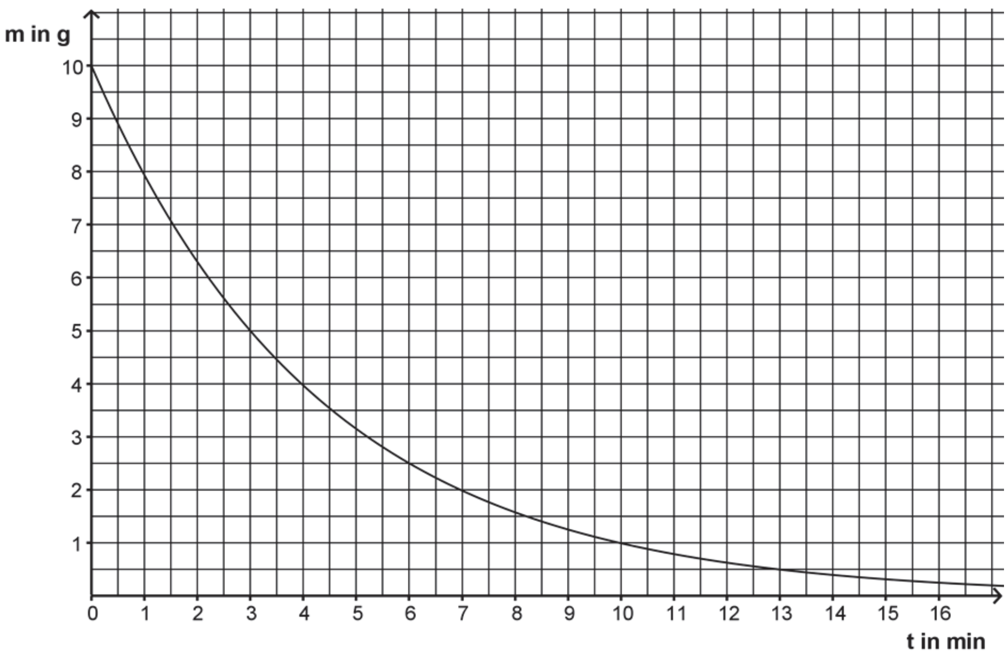
Punkte

4. Das Trapez ABCD setzt sich aus mehreren Dreiecken zusammen (siehe Skizze). Formulieren Sie jeweils eine Anwendung des Höhensatzes und des Kathetensatzes unter Verwendung der in der Skizze angegebenen Streckenbezeichnungen. 2



5. Die Halbwertszeit des radioaktiven Elements Radium beträgt 1602 Jahre.
   a) Berechnen Sie die Masse an Radium, die nach 400 Jahren von ursprünglich 5000 Gramm noch vorhanden ist.
   b) Ermitteln Sie rechnerisch, nach wie vielen Jahren von ursprünglich 80 Gramm Radium noch 56,57 Gramm vorhanden sind.

   Der Zerfall von 10 g radioaktivem Polonium-218 wird durch den folgenden Graphen dargestellt.



   c) Bestimmen Sie die Halbwertszeit des Elements anhand des Graphen.
   d) Geben Sie an, nach wie vielen Minuten von 10 g Polonium-218 nur noch 0,5 g vorhanden sind. 5

Fortsetzung nächste Seite

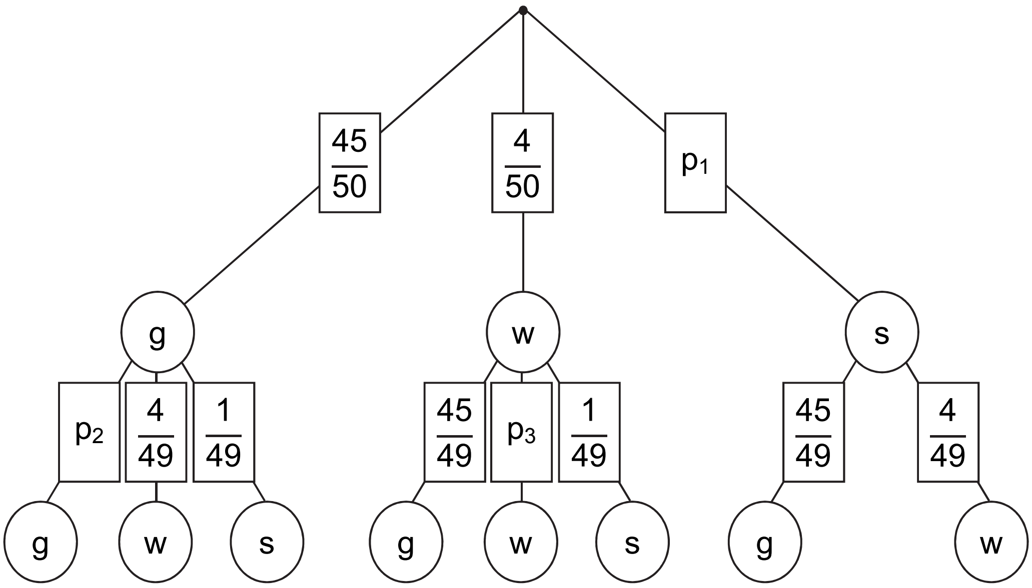
Punkte

6. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch.

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{x-3}=\frac{3}{x-3}-2$$ 4

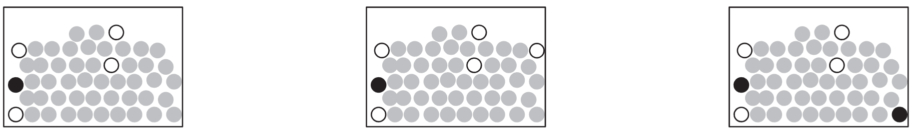
7. In einem Behälter befinden sich Kugeln in den Farben grau (g), weiß (w) und schwarz (s). Bei einem Zufallsexperiment wird zweimal nacheinander jeweils eine Kugel gezogen.

   Das folgende Baumdiagramm stellt die möglichen Ergebnisse dieses Zufalls-experiments dar.



   a) Begründen Sie anhand des Baumdiagramms, dass es sich um ein Zufallsexperiment ohne Zurücklegen handelt.

   b) Notieren Sie auf Ihrem Lösungsblatt die Nummer des Behälters (siehe Abbildung unten), die zum dargestellten Baumdiagramm passt.



(1) (2) (3)

   c) Geben Sie die im Baumdiagramm fehlenden Wahrscheinlichkeiten p_2 und p_3 in Bruchschreibweise an.

   d) Berechnen Sie, wie hoch die Wahrscheinlichkeit ist, dass es sich bei den beiden gezogenen Kugeln um eine graue sowie um eine weiße handelt. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

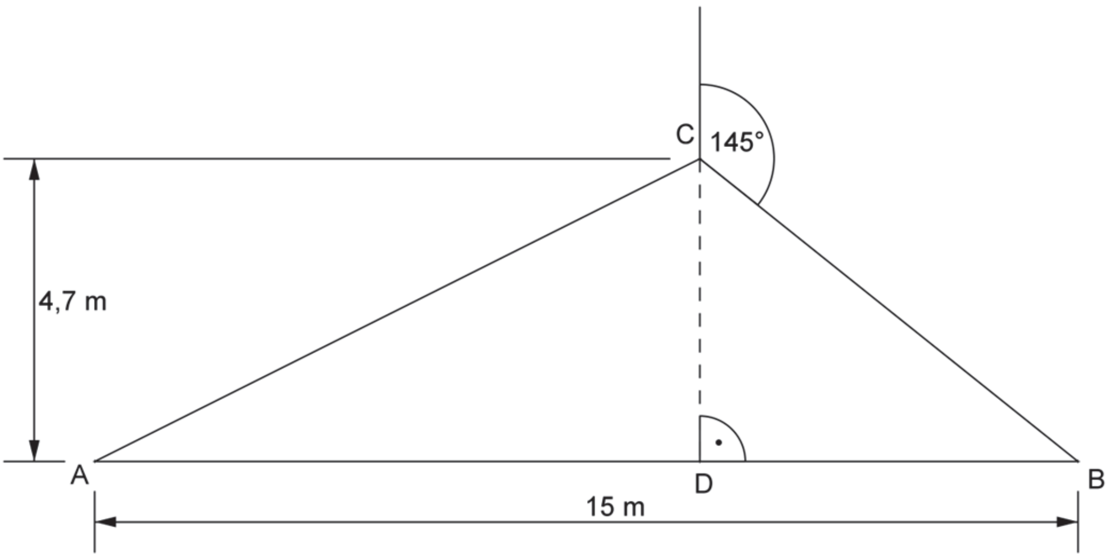
8. Folgende Gleichungen sind Anwendungen von Binomischen Formeln.

   Ersetzen Sie jeweils den Platzhalter ■ durch den entsprechenden Term und schreiben Sie die mathematisch richtigen Gleichungen auf Ihr Lösungsblatt.

   a) $(\blacksquare + \blacksquare)^2 = \blacksquare + 2fc + 0{,}25c^2$

   b) $(\blacksquare - 5m)^2 = 1{,}44e^2 - \blacksquare + \blacksquare$ 3

9. Berechnen Sie den Umfang des in der Skizze dargestellten stumpfwinkligen Dreiecks ABC.



Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu 4

10. Eine zylinderförmige Blumenvase hat ein Gesamtvolumen von 2,5 Litern. Sie ist zu $\frac{3}{4}$ mit Wasser gefüllt.

    Es werden 60 farbige Deko-Glaskugeln hineingegeben, die vollständig untertauchen. Danach ist die Vase zu $\frac{4}{5}$ ihres Gesamtvolumens gefüllt.

    Berechnen Sie den Durchmesser einer Glaskugel. 4

Summe: 45