MITTLERER SCHULABSCHLUSS
AN DER MITTELSCHULE 2017

MATHEMATIK

22. Juni 2017
8:30 Uhr – 11:00 Uhr

Platzziffer (ggf. Name/Klasse): ______________________________

Die Benutzung von für den Gebrauch an der Mittelschule zugelassenen **Formelsammlungen** bzw. **Taschenrechnern** ist während der gesamten Prüfung **erlaubt** (vgl. KMS vom 12.02.2014 Nr. IV.2 – S 7500 – 4. 4272).

Ergebnisse können nur dann bewertet werden, wenn sowohl der **Lösungsweg** als auch die **Teilergebnisse** aus dem Lösungsblatt ersichtlich sind und sich die Gesamtergebnisse daraus ableiten lassen. Auf mathematische Genauigkeit und korrekte Schreibweisen ist zu achten.

Jeder Prüfling muss **die eine** vom Prüfungsausschuss ausgewählte **Aufgabengruppe** bearbeiten.

Gesamtbewertung		Erst-korrektur	Zweit-korrektur
Aufgabengruppe I oder II	45 Punkte		

Note

Notenstufen	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Punkte	45 – 38	37,5 – 31	30,5 – 23	22,5 – 15	14,5 – 7	6,5 – 0

Erstkorrektur: ______________________________
(Datum, Unterschrift)

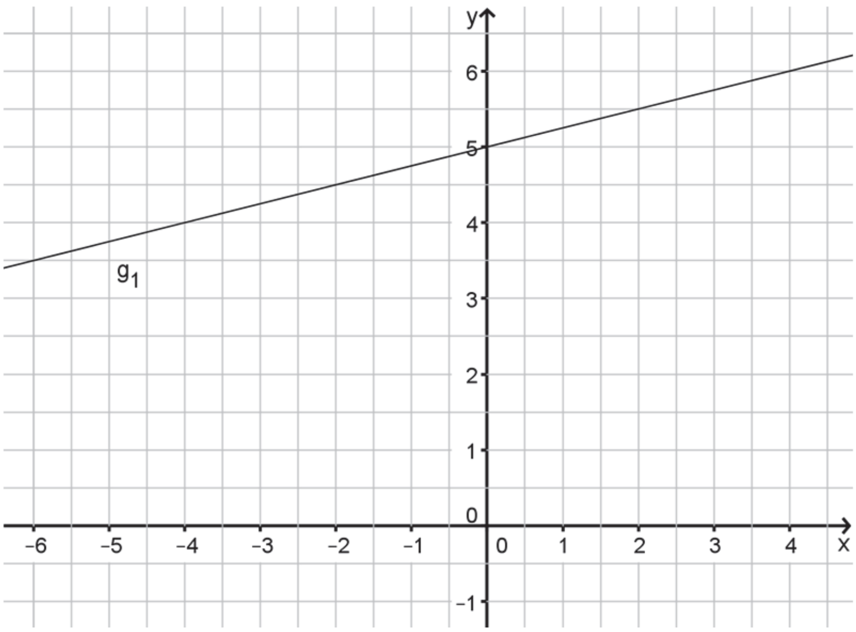
Zweitkorrektur: ______________________________
(Datum, Unterschrift)

Bemerkung: ______________________________

Aufgabengruppe I

Punkte

1. Die folgende Abbildung zeigt den Graphen der Geraden g_1:



a) Geben Sie die Funktionsgleichung von g_1 an (siehe Abbildung).

b) Die Gerade g_2 durch den Ursprung ist parallel zur Geraden g_1.
Geben Sie die Funktionsgleichung von g_2 an.

c) Die Gerade g_4 verläuft durch den Punkt $D\,(4\,|\,1)$ und ist parallel zur Geraden g_3: $y = 0{,}5x + 3$.
Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von g_4.

d) Zeichnen Sie die Geraden g_3 und g_4 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -4 bis 6, y-Achse von -3 bis 5

e) Gegeben ist die Gerade g_5: $y = \frac{2}{3}x - 2$.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N von g_5 mit der x-Achse und geben Sie N an.

f) Weisen Sie nach, dass der Punkt $A\,(-3\,|\,-4)$ auf der Geraden g_5 liegt.

g) Die Gerade g_6 wird durch die Gleichung $4 = -2x - 2y$ bestimmt und schneidet die Gerade g_5 im Punkt C.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes C und geben Sie diesen an.

h) Überprüfen Sie rechnerisch die folgende Aussage:
Die Geraden g_5 und g_6 stehen aufeinander senkrecht. 9

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

2. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch:

$$\frac{x-4}{6}+\frac{4(x-11)}{x-6}=\frac{16-x}{2}$$ 4

3. a) Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte $A(-4|6)$ und $B(-2|-2)$.
   Geben Sie die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform an.

   b) Eine nach unten geöffnete Normalparabel p_2 hat den Scheitelpunkt $S_2(-1|2)$.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Funktionsgleichung von p_2 in der Normalform.

   c) Zeichnen Sie die Parabeln p_1 und p_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
   Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -5 bis 3, y-Achse von -4 bis 7

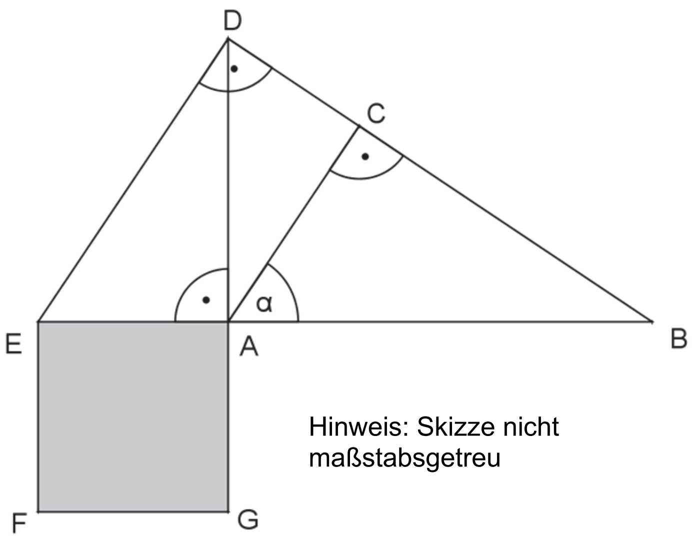
   d) Die Parabeln p_3 und p_4 sind durch folgende Funktionsgleichungen bestimmt:
   p_3: $x^2-4x=y-5$

   p_4: $y=-x^2+4x-1$

   Berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte P und Q der Parabel p_3 mit der Parabel p_4 und geben Sie diese Punkte an.

   e) Durch Spiegelung der Parabel p_3 an der x-Achse entsteht die Parabel p_5.
   Geben Sie die Funktionsgleichung von p_5 in der Scheitelpunktform an. 8

4. Im Dreieck ABC hat die Strecke [BC] eine Länge von 4 cm und der Winkel α eine Größe von 53,13° (siehe Skizze).
   Berechnen Sie den Flächeninhalt des Quadrats AEFG.

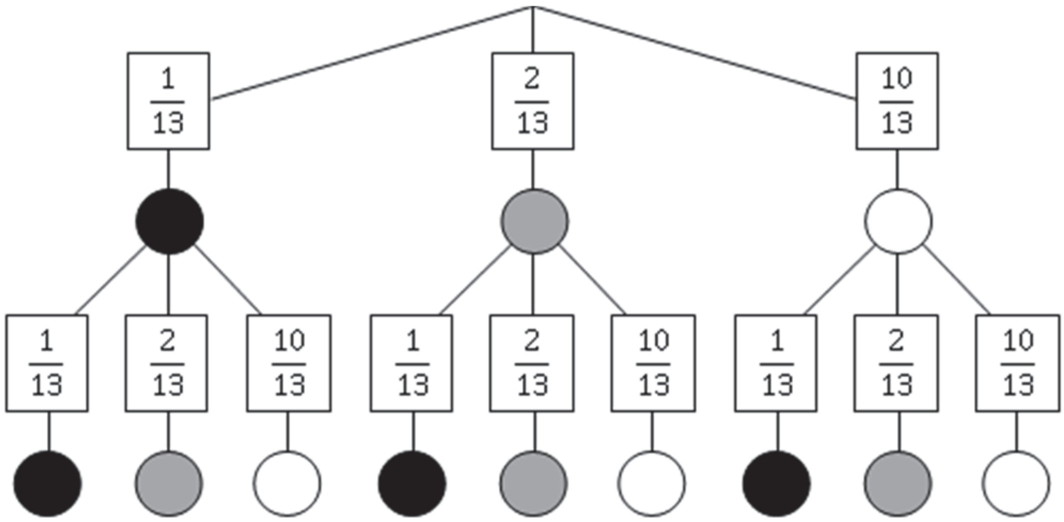


4

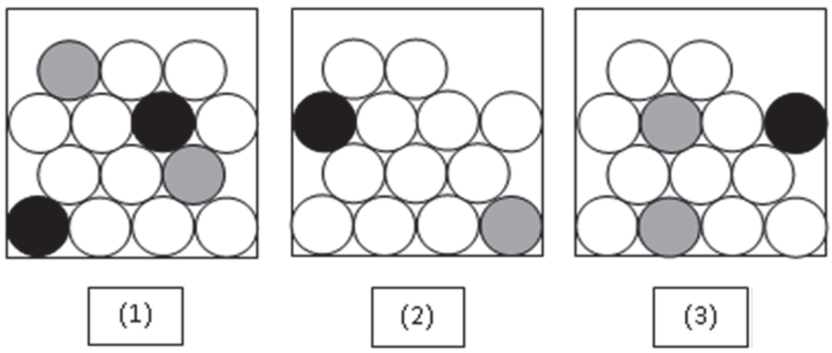
Fortsetzung nächste Seite

Punkte

5. Aus einem Behälter wird zweimal nacheinander eine Kugel entnommen.
   Das folgende Baumdiagramm stellt dieses Zufallsexperiment dar:



   a) Notieren Sie auf Ihrem Lösungsblatt die Nummer des Behälters (siehe Abbildung unten), die zum dargestellten Baumdiagramm passt.



   b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei dem (im Baumdiagramm dargestellten) Vorgang mindestens eine der beiden entnommenen Kugeln weiß ist.

   c) Das Zufallsexperiment wird wiederholt, ohne dass die beiden nacheinander entnommenen Kugeln zurückgelegt werden.
      Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der entnommenen Kugeln weiß ist. 4

6. Die folgenden Gleichungen sind Anwendungen von Binomischen Formeln.
   Ersetzen Sie jeweils den Platzhalter $\blacksquare$ durch den entsprechenden Term und schreiben Sie die mathematisch richtigen Gleichungen auf Ihr Lösungsblatt.

   a) $(\blacksquare - 3z)^2 = 0{,}25x^4y^2 - \blacksquare + \blacksquare$

   b) $(4\sqrt{z} + \blacksquare) \cdot (4\sqrt{z} - \blacksquare) = \blacksquare - 25x^2$ 3

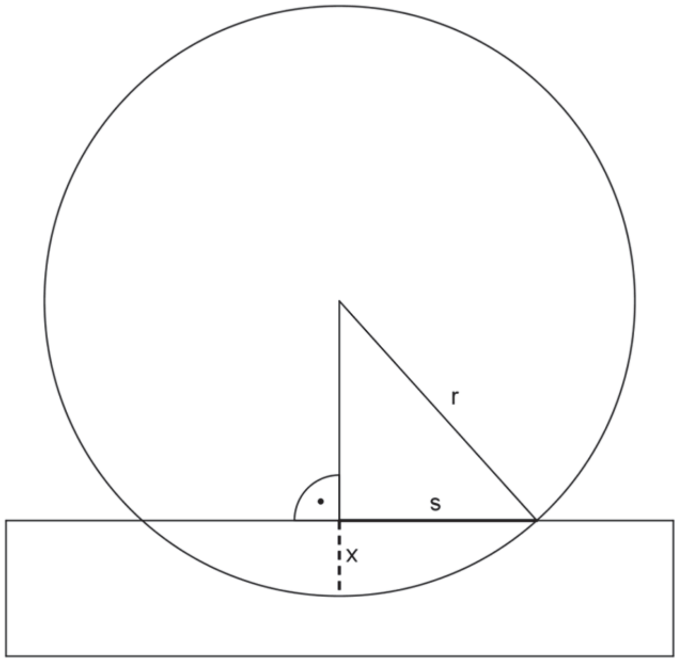
Fortsetzung nächste Seite

Punkte

7. Eine Eisenkugel mit der Masse $m = 17{,}5\,\text{kg}$ wurde in einen verformbaren Werkstoff gedrückt (siehe Skizze).
$1\,\text{cm}^3$ Eisen wiegt $7{,}8\,\text{g}$.

Ermitteln Sie rechnerisch die Tiefe x, wenn gilt: $s = 5\,\text{cm}$.

Hinweis: Skizze nicht maßstabsgetreu



4

8. Frau Geiz will zum 1. Januar 2018 bei einer Onlinebank 3000 € anlegen. Ihr Wunsch ist es, diesen Betrag in den nächsten 17 Jahren mit Zins und Zinseszins zu vervierfachen.

a) Notieren Sie auf Ihrem Lösungsblatt alle Gleichungen, die diesen Sachverhalt richtig darstellen.

- $12000 = q^{17} \cdot 3000$
- $q = \sqrt[17]{4}$
- $12000 = 4 \cdot q^{17} \cdot 3000$
- $q^{17} = \frac{1}{4}$

b) Die Bank gewährt Frau Geiz einen Zinssatz von 2,51 %.
Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich das Kapital tatsächlich vervierfacht hätte.

c) Berechnen Sie die Höhe des Kapitals, das Frau Geiz anlegen müsste, damit sie bei einem Zinssatz von 2,51 % nach 17 Jahren einen Gesamtbetrag von 12 000 € zur Verfügung hätte. 4

Fortsetzung nächste Seite

	Punkte
9. Das Viereck ABCD wird durch zentrische Streckung mit dem Streckungsfaktor $k = 3$ auf das Viereck A'B'C'D' abgebildet. Begründen Sie, ob die jeweiligen Aussagen wahr oder falsch sind. (1) Die Strecken des Vierecks ABCD sind dreimal so lang wie die des Bildvierecks A'B'C'D'. (2) Der Flächeninhalt des Bildvierecks A'B'C'D' ist neunmal so groß wie der Flächeninhalt des Vierecks ABCD. (3) Der Winkel α ist dreimal so groß wie der Winkel α'.	3
10. Vereinfachen Sie den folgenden Term so weit wie möglich. Es gilt: $x, y, z \neq 0$. $\dfrac{(3x^2 + 4x^2) \cdot x^3 \cdot y^5 \cdot 2z^{-4}}{x^4 \cdot y^5 \cdot y^{-3} \cdot 2z^2 \cdot z^{-6}}$	2
Summe:	**45**

Aufgabengruppe II

Punkte

1. Gegeben ist die Gerade g_1 mit der Funktionsgleichung g_1: $y = \frac{1}{3}x + 2$.

   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts N von g_1 mit der x-Achse und geben Sie N an.

   b) Die Gerade g_2 schneidet die y-Achse im Punkt $P\,(0\,|\,7)$ und steht senkrecht auf der Geraden g_1.
   Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von g_2 rechnerisch.

   c) Die Gerade g_3 verläuft durch die Punkte $Q\,(-3\,|\,-2)$ und $R\,(6\,|\,1)$.
   Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g_3 rechnerisch.

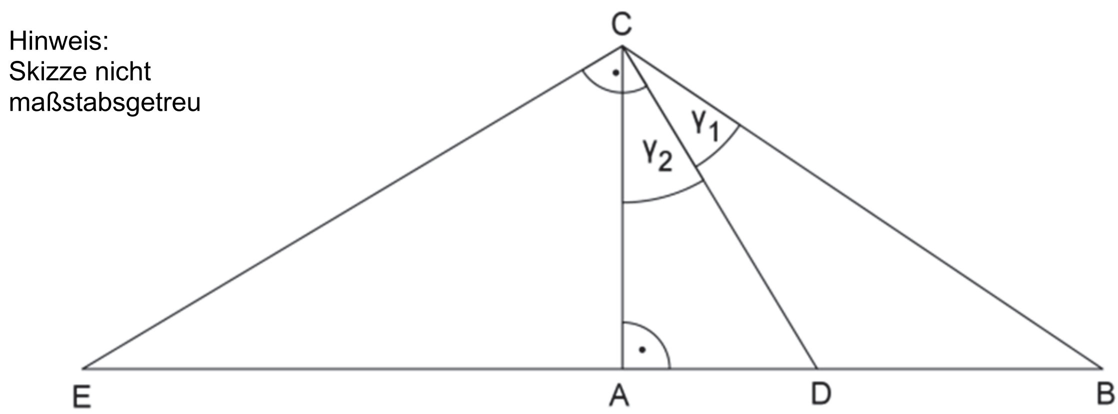
   d) Zeichnen Sie die Geraden g_1 und g_2 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
   Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -7 bis 4, y-Achse von -1 bis 9

   e) Die Gerade g_4 wird durch die Gleichung $-2x = -y + 7$ bestimmt. Sie schneidet die Gerade g_1 im Punkt S.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten von S.

   f) Berechnen Sie die Größe des spitzen Winkels α, den die Gerade g_1 mit der x-Achse einschließt.

   g) Die Gerade g_5 durch den Punkt $T\,(15\,|\,-25)$ verläuft parallel zur x-Achse.
   Geben Sie die Funktionsgleichung von g_5 an. 8

2. In einem rechtwinkligen Dreieck ADC (siehe Skizze) hat die Strecke [CD] eine Länge von 5 cm, die Strecke [AD] eine Länge von 3 cm.
   Die Größe des Winkels γ_1 beträgt 25°.



   a) Bestimmen Sie rechnerisch den Flächeninhalt des Dreiecks EDC.

   b) Berechnen Sie die Länge der Strecke [BD]. 5

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

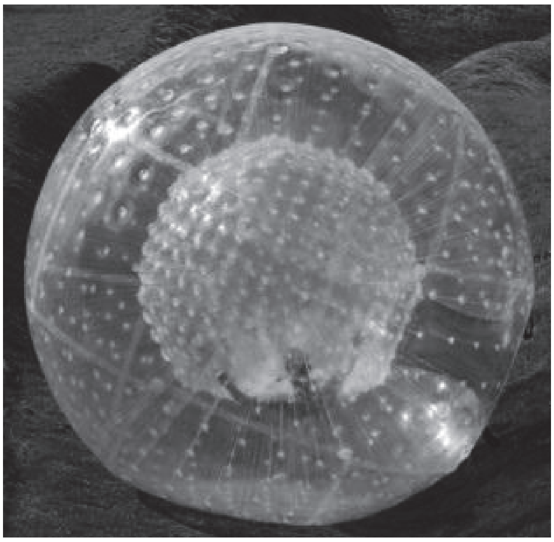
3. Bei einer Schilddrüsenerkrankung verwendet man für Untersuchungen ein Kontrastmittel mit Iod-123. Dabei werden den Patienten pro Kilogramm Körpergewicht 0,5 g Iod-123 verabreicht.
Iod-123 hat eine Halbwertszeit von 13 Stunden.

   a) Bei einer solchen Untersuchung erhält eine 60 kg schwere Patientin die entsprechende Menge an Iod-123.
   Berechnen Sie ausgehend davon die Menge an Iod-123, die nach 65 Stunden noch nicht zerfallen ist.

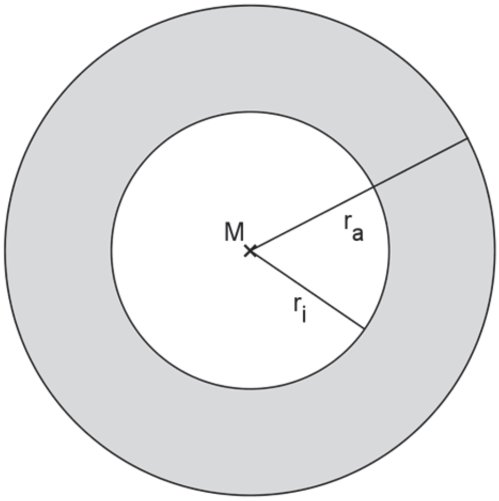
   b) Ermitteln Sie rechnerisch die Zeitspanne, nach der noch ein Zehntel der verabreichten Menge Iod-123 vorhanden ist.

   c) Berechnen Sie den stündlichen Abbau von Iod-123 in Prozent. 5

4. Beim „Zorbing“ rollt eine Person im Inneren einer doppelwandigen, meist durchsichtigen Kugel einen Abhang hinunter (siehe Bild).
Vereinfacht betrachtet handelt es sich bei einer Zorbing-Kugel um eine äußere und innere Kugel mit gleichem Mittelpunkt (siehe Skizze). Der Einstiegstunnel wird bei den folgenden Aufgaben vernachlässigt.



Bildquelle:
„Zorb ball“ (https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Zorb.jpg) von einalem - eigenes Werk.
Lizenziert unter CC BY-SA 3.0 (http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0)
über Wikimedia Commons



Der Radius r_a der äußeren Kugel ist um 70 cm größer als der Radius r_i der inneren Kugel. Die äußere Kugel hat einen Durchmesser von 3,20 m.

   a) Berechnen Sie das Volumen des Hohlraums zwischen der äußeren und der inneren Kugel in Liter.

   b) Nach jeder Benutzung muss die Kugel außen gereinigt werden.
   Berechnen Sie die zu reinigende Fläche. 4

Fortsetzung nächste Seite

Punkte

5. a) Eine nach oben geöffnete Normalparabel p_1 verläuft durch die Punkte $A(-2|3)$ und $B(1|6)$.
   Berechnen Sie die Funktionsgleichung von p_1 in der Normalform.

   b) Eine weitere Normalparabel hat die Funktionsgleichung p_2: $y = -x^2 + 2x + 3$.
   Berechnen Sie die Scheitelpunktform von p_2 und geben Sie den Scheitelpunkt S an.

   c) Die Parabel p_2 schneidet die x-Achse in den Punkten N_1 und N_2.
   Berechnen Sie die x-Koordinaten dieser Punkte.

   d) Die Parabel p_3: $y = x^2 - 1$ schneidet die Parabel p_2 in den Punkten C und D.
   Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten dieser Schnittpunkte und geben Sie C und D an.

   e) Zeichnen Sie die Parabeln p_2 und p_3 in ein Koordinatensystem mit der Längeneinheit 1 cm.
   Hinweis zum Platzbedarf: x-Achse von -3 bis 4, y-Achse von -3 bis 5

   f) Die Parabeln p_4 und p_5 sind durch folgende Funktionsgleichungen bestimmt:
   p_4: $y = x^2 + 1$ $\qquad$ p_5: $y = -x^2 - 1$
   Wählen Sie eine der Parabeln p_4 oder p_5 aus und geben Sie die Anzahl ihrer Schnittpunkte mit der Parabel p_3 an.
   Begründen Sie Ihre Antwort entweder anhand einer Skizze, mit eigenen Worten oder durch Rechnung. 8

6. Jede der folgenden vier Aussagen ist für $a > 1$ korrekt. Weisen Sie dies jeweils durch mathematische Umformungen nach.

   a) $3\sqrt{9a^4} = 9a^2$

   b) $\sqrt[3]{729a^8} \neq 9a^2$

   c) $\dfrac{27a^{-2}}{3a^{-4}} = 9a^2$

   d) $\dfrac{1}{6^{-1}} + 3a^2 \neq 9a^2$ 2

7. Geben Sie die Definitionsmenge der folgenden Gleichung an und ermitteln Sie die Lösungsmenge rechnerisch.

   $$\frac{10}{x+3} + \frac{9(x-4)}{x+1} = \frac{5x}{x+3} - 6$$ 4

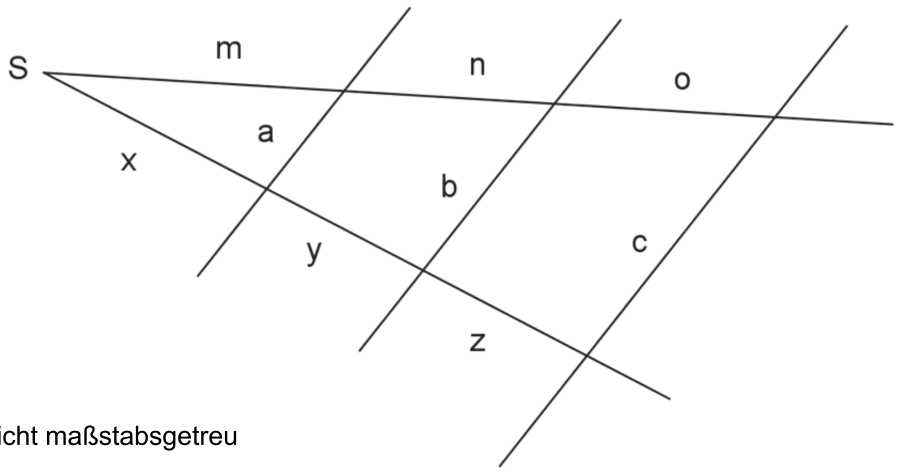
Fortsetzung nächste Seite

Punkte

8. Notieren Sie auf Ihrem Lösungsblatt, ob die jeweilige Behauptung richtig (r) oder falsch (f) ist.
   a) Der Sinus eines Winkels kann nie größer als 1 sein.
   b) V_{Kugel} (mit Durchmesser d = 10 cm) < $V_{Würfel}$ (mit Kantenlänge a = 10 cm).
   c) Eine Gerade hat mit einer Parabel immer zwei Schnittpunkte.
   d) Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die korrekten Lösungen für die Teilaufgaben a), b) und c) erraten, beträgt 8^{-1}. 2

9. a) Schreiben Sie die folgenden Aussagen auf Ihr Lösungsblatt und ersetzen Sie jeweils den Platzhalter ■ so, dass die Beziehungen richtig wiedergegeben werden.

   Es gilt: a || b || c



Hinweis:
Skizze nicht maßstabsgetreu

I) $\frac{c}{a} = \frac{■}{x}$

II) $■ \cdot a = b \cdot m$

b) Die Länge der Strecke a beträgt 3,5 m. Sie wird durch eine zentrische Streckung mit dem Zentrum S auf die Strecke c mit der Länge 875 cm abgebildet.
   Berechnen Sie den Streckungsfaktor k. 3

Fortsetzung nächste Seite

	Punkte
10. Bei einem Skirennen starten zwölf Läufer: Vier Deutsche, fünf Österreicher und drei Schweizer. Die Startreihenfolge wird ausgelost, indem die Namen der Läufer nacheinander und zufällig aus einer Lostrommel gezogen werden.	
a) Erstellen Sie für die Vergabe der ersten zwei Startplätze ein Baumdiagramm, das nur die Nationalitäten der Läufer berücksichtigt. Beschriften Sie die Äste mit der jeweiligen Wahrscheinlichkeit.	
b) Ermitteln Sie rechnerisch die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter den ersten beiden Startern keiner aus der Schweiz befindet.	
c) Die Österreicher planen für ihr Training ein eigenes Rennen. Berechnen Sie die Anzahl aller Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge sich die fünf Läufer dabei platzieren können. Gehen Sie davon aus, dass alle Skifahrer mit unterschiedlichen Zeiten ins Ziel kommen.	4
Summe:	**45**